

平成17年4月14日

平成16年度「教育研究支援プロジェクト経費」成果報告書

プロジェクトチームの代表者 部・講座等名 自然系（数学）教育
氏 名 丸 林 英 俊

プロジェクトの名称	純粋数学・数学教育の研究及びそれらを基にした学校教員 （算数・数学）の育成	配 分 予算額	1,448,000 円
プロジェクトの概要	教員養成系大学の教育・研究を先導する立場にある本学の教員（特に数学教育に携わる）の使命は ①それぞれの専門の研究を通して数学の文化、数学教育の発展に寄与すること。 それらを基にして ②教育現場における学校数学・算数のあり方を再検討し、その結果を学部教育、大学院教育、さらには現場教育に活かすこと、である。 これらの使命を果たすためには、教員自身が、数学に対する深い理解と共に、現在も急速に発展・変容し続けている最先端の数学、及び数学教育に対する正当な認識を持ち、現場の数学教育のあるべき方向を見極める高い知識と感覚（数覚）を培い続けねばならない。 これらの目的のため純粋数学・数学教育に関する学術書（特に、洋書）を購入した。		
成 果 の 概 要	最新の学術書を購入し、それらを通して下記のような成果を挙げる事ができた： ①それぞれの専門の研究に購入した学術書を利用し、数学の文化、数学教育の発展に寄与することができた。 ②21世紀の数学のトレンドをより正確に深く理解することができた。 これを通して ③幾つかの教材を開発することができた。 ④将来の小・中・高の算数・数学の教材の内容に対してシュミレーションできるようになった。 ⑤創造性豊かな人材育成のための教授法・内容に対する知見が高まった。 これら①～⑤を通して得られたことを基にして ⑥学部・大学院での教育、現場での実践で教育の発展に寄与していく予定である。 尚、具体的に開発した教材、数学教育に関しては添付を参照のこと。		

添付資料

研究プロジェクト経費を利用して、各自の専門の研究及び数学教育に関する研究を行うことができた。ここでは、その中で、実践的数学教育、教材開発、及び純粋数学の専門の立場からの数学教材に対する考え方を添付する。

(I) 松岡 隆

曲線群の包絡線について研究した。包絡線は曲線を連続的に変化させていくときに現れる曲線であり、幾何学的対象として興味深くまた応用も広いものである。しかしながら、これを求める標準的な方法は偏微分法を用いることであり、面白い題材であるにも関わらず学校現場で取り扱うことには無理があった。ここでは、たまごの法線群から作られる包絡線を題材に取り上げ、具体的作図により包絡線の形をかなり正確に求めることができることを確認するとともに、得られた包絡線を観察することにより、卵の重心の位置によって安定な置き方がどのようにかわるかについて分析できることを示した。

(II) 成川 公昭

自然界における様々な非線形現象は非線形偏微分方程式で記述されることが多く、これを解析するには無限次元空間における非線形作用素の研究が必要となる。とくに、ある関数空間上で定義された汎関数の特異点や非線形作用素の不動点がそれに対応する微分方程式の解を与えることになる。従って、特異点や、不動点の研究を行い、その性質を明らかにすることが自然現象を解明することに繋がる。本研究では、そのことを目指し、舞台となる関数空間とその上で定義されたエネルギー汎関数の性質を調べ、位相的構造を明確にすることにより解の性質を明らかにした。

これらの研究は、実際の学校数学で行われているものと全く無関係なものでなく、その概念において、緊密に繋がるものである。例えば、高校において教えられている中間値の定理を使つての2次方程式や3次方程式の解の個数の問題、微分を使つて極値問題を扱うことなどは将来このような現象を取り扱う上で共通の基本概念を基盤としてもっている。

例えば、入試の際に出題される解の個数を求める問題が、一見当たり前のように見えて、また、その問題自身どれだけの意味を持つのか実感することは難しいかもしれない。

しかし、この問題の裏に実数の連続性とそれを基盤とした連続関数の中間値の定理に基づく事実が存在し、その土台のもとで理論が展開しているということを認識することが極めて重要なことであると思われる。それをはっきりと認識することが、例えば、平面内の2つの面積を持つ図形は一本の包丁で常に同時に2等分できるが、2本のひもは包丁の左右が同じ長さになるよう同時には切断できない、ことを理解することによって発展し、さらにはハムサンドイッチの定理(ハムサンドイッチの上のパン、下のパン、中央に挟まれたハムを1本のナイフでそれぞれの体積を2等分するよう切ることができる。)の理解へと繋がっていく。

このような土台となる基本概念をはっきりと認識し、その基盤の上にいかに広く世

界が広がっていくかを十分に体験し、それを味わっていることこそが現場の教師に求められることであろう。

(III) 丸林 英俊

「Division Algorithm の教材化」

自然数に対する Division Algorithm とは：

与えられた自然数 a, b に対して、 $a = qb + r$ を満たす自然数 q ,

$r (0 \leq r < b)$ が unique に存在することである。

この性質は小学校・中学校の教科書に掲載されている。更に、初等整数論の多くの理論はこの性質を直接使用するか又はこの性質を利用して得られる結果を利用して得られている。

高等学校では多項式の Division Algorithm が証明無しに次のように掲載されている：

与えられた多項式 $f(x), g(x) \neq 0$ に対して $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ を満たす $q(x), r(x) (0 \leq \deg(r) < \deg(g))$ が unique に存在する。

特に、 $g(x) = (x - a)$ の時、

$$f(x) = q(x)(x - a) + r, r = f(a) = a_n a^n + \dots + a_1 a + a_0 \quad (*)$$

$(f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)$ となる。

この Division Algorithm のアイデアは整数論、多元環の理論の中でも考えられ、重要な役割を果たしている。

ここで、多項式全体の集合は次のように乗法を与えると環になる： $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ 、

σ は自己同型、 δ は微分を表す。この時 $(*)$ はどうなるかを考える。

$$f(x) = q(x)(x - a) + r, r = a_n N_n(a) + \dots + a_1 N_1(a) + N_0(a)$$

となり、上記の $r = a_n a^n + \dots + a_1 a + a_0$ とは異なる。ここで、 $N_i(a)$ は inductively, $N_0(a) = 1, N_1(a) = a, \dots, N_{i+1}(a) = \sigma(N_i(a))a + \delta(N_i(a))$ とする。

この新しい教材は高等学校の選択教科で授業可能であると考えている(2時間程度)。この新しい多項式の全体の作る環は最近盛んに研究されている量子群、非可換代数幾何学と関係している。このように定義を変更することにより(勿論、数学的に意味のある)結果が変わること、それらが他の分野への応用可能であること、最近の数学の発展の一端に自然に触れさせること等を通して数学に興味のある生徒に夢を与えてやりたい。

(IV) 小林 滋

ユークリッド幾何学の構築の中で、定規とコンパスによる作図問題がある。これと同様に、正方形の紙を折る操作で、どのような数が折れるかという問題が最近流行(?)している。紙の折り方を公理化することで、4次方程式までの実数解はすべて折ることが知られている。更に折り方の新しい公理を発見することで、5次方程式の実数解も折ることができると考えられているが、そこには公理以外に現代の「数学」が必要になってくる。これらは単に数学としての面白みだけではなく数学の文化、数学教育の発展に寄与するものと考えられている。

(V) 秋田 美代

中学校数学2年「数と式」の領域を対象とした学習内容の理解と関心・意欲との関係についての研究

IEA(国際教育到達度学会)の「国際数学・理科教育動向調査」の報告(文部科学省, 2004)や OECD(経済協力機構)の「学習到達度調査」の報告(国立教育政策所編, 2004)の調査結果から、日本の児童・生徒の算数・数学学力は国際的にみて高い水準にあるが、算数・数学に対する関心・意欲は低いことが分かる。数学教育においては生徒の関心・意欲を高めることは、重要な課題である。しかし、生徒の学習内容についての理解と関心・意欲がどのように関係しているのかを詳細に分析した報告は数少ない。

そこで、中学2年生の「数と式」の領域を対象として、「基礎的・基本的な計算技術についての理解」と「問題を解決する際の手順・手続きに関する理解」という視点で生徒の学習内容の理解の仕方を分類し、その特性を明らかにした。クラスター分析により生徒の理解の仕方を5つのクラスターに分類し、それぞれのクラスターの学習特性及び学習内容の理解と関心・意欲の関係を分析した。その結果、以下のことが判明した。①基礎的・基本的な計算技能の理解が十分でなければ学習内容の定着が保持しない。②基礎的・基本的な計算技能と問題を解決する際の手順・手続きの理解が伴っているとき数学学習に対する関心・意欲が高まる。